Field Theory of Unstable Systems: A Brief Review of Recent Developments

九大　理　川崎恭治

熱力学的に不安定な状態に急冷した系の示すゆらぎの動力学は Cahn-Hilliard 理論以来、非線形場の理論の一つの典型である。昔は合金のようなスカラ場の話が大部分であったが、最近はベクトル場等、より複雑なオーダーパラメータをもつ系に話題の中心が移りつつある。この中には初期の宇宙の相転移[1]や身近な所では次の豊木氏の話にもある液晶が含まれる。この様な非線形場の問題では解析的取り扱いの困難さ故に専ら計算機シミュレーションに頼ることが多かった。一方、場が非保存の場合には厳密解ではないが、強力な解析的取り扱いによる研究がここ数年の間に急激に進んで来た。これには次の二つの流れがある。

（I）　漸近法

（II）　トポロジカルな欠陥の集団動力学

これらの方法は全く異なった発想から出発したにも拘らず場の量の同時相関関数のような統計的性質は、単なるスケール因子を除いて全く一致すると云う驚くべき事実がある。ここで取り扱われているのは空間 d 次元の n 成分のベクトルオーダーパラメータの系である。上述の解析理論は $n \simeq d$ の近傍を除いて満足すべき結果を与えることが（但し $d \geq 2$）計算機シミュレーション等と比較して確かめられているが、$n = d$ 近傍、特に $n = d$ が小さい時には事はそれ程簡単ではなく、流体系（レーレー・ベナール対流や液晶の電気流体力学）にみられる様な位相変数とトポロジカルな欠陥の複雑に絡み合った運動が関与しているものと思われる。

ここで述べた事柄は筆者が１０年かそれより前にしばらく取り組んだテーマであったが、この８月に早稲田大学で開かれる Quantum Physics and the Universe　と云うシンポジウムで話を依頼されたのを契機に昔の仕事とその後の主に他の人々による発展を振り返ってみた結果である。その際新たに出て来た次の二つの事柄或は問題提起について触れる。

１）<u>仮想的トポロジカルな欠陥は有用な役割を果たし得るか</u>

一般に安定なトポロジカルな欠陥は $d \geq n$ の場合に限られる。しかし $n > d$ であっても、この d 次元空間を拡張された $d'(> n)$ 次元実空間に埋め込まれた部分空間と考えると、d' 次元空間で安定に存在するトポロジカルな欠陥が d 次元空間にその影を落とすことはあり得る。例えば texture と呼ばれるものにはその様な性質があるように思われる。

２）<u>微分方程式の新しいタイプの積分形</u>

n 成分のベクトル場を $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ とかきその従う方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = D(\nabla)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t))$$

とかく。ここで $D(\nabla)$ は線形微分演算子で $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t))$ は $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ の非線形関数（それ自身も n ー成分ベクトル)。上式は次のような積分型に直せる：

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = e^{Dt}\tilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{r},0) + \int_0^\infty dt' e^{Dt'}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t-t'))$$

但し

$$\tilde{S}(r,0)=S(r,0)-\int_0^\infty dte^{Dt}N(S(r,-t))$$

これを使えば今までの（I）の漸近法でなされて来た議論がよりすっきりしてくる。この結果は $N(S(r,t))$ が $N(r,\{S(\cdot,t)\})$ のように $S(r,t)$ の汎関数であってもよい。（例えば保存系）が今は簡単のために只の関数としておく。この式のメリットはこの方程式の解が次のようにかけることである。

$$S(r,t)=\Theta(r,\{e^{Dt}\tilde{S}(\cdot,0)\})$$

これを上の方程式に代入するとΘに対する次の汎関数方程式になる。

$$\Theta(r,\{x(\cdot)\})=x(r)+\int_0^\infty dte^{Dt}N(\Theta(r,\{e^{-Dt}x(\cdot)\})$$

ここで t は単なる積分変数で、もはや、時間は表だってあらわれない。この exact な式を出発点にして色々近似を導入することができる。最近 Mazenko 等が、保存系も含めた系の解析的取り扱いを勢力的に展開しているが、筆者には必ずしも理解できない点が多い。本稿で述べた方法が或はこの様なより一般の系にも役に立つかも知れない。因に N が汎関数のときはΘの式の被積分関数の中の N は

$$N(r,\{\Theta(\cdot,\{e^{-Dt}x(:)\})\})$$

となり、何れにしても x の汎関数である。

以上、述べた事の詳細は文献[2]、[3]及びそこの引用文献を参照されたい。

文献

[1] Chuang, I., Turok, N. and Yurke, B. (1991) Cosmology in the laboratory: defect in liquid crystals. *Science* **251**, 1336-1342 (1991).
[2] Kawasaki, K. Non-conserved ordering kinetics, submitted to *Physica A* (1992).
[3] Kawasaki, K. Scale-invariant growth in nonlinear systems. In *Vistas in Astronomy : Proceedings of the International Symposium on Quantum Physics and the Universe.* Eds. M.Namiki, *et al* (1992).